

$$\textcircled{1} \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega \end{cases}$$

//Ресар//

11/11

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} \Big|_{\partial \Omega} = \psi, \end{cases} \text{ где } \Omega - \text{огр. обл-ть в } \mathbb{R}^n, n \geq 2,$$

$\psi \in C(\partial \Omega)$, $\psi = \psi(y)$ - задан. ф-ция

$$u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = ?$$

Усиленный класс реш-ий: $u \in C^2(\bar{\Omega})$

I (Необх. усл. разрешимости з. Неймана)

А) того чтобы з. (I) имела реш. $u \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\text{Необх., чтобы } \int_{\partial \Omega} \psi(y) dS_y = 0 \quad (3)$$

$$\blacktriangle \int_{\partial\Omega} \psi(y) ds_y \stackrel{(II)}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) ds_y = h \int_{\partial\Omega} 1 ds_y =$$

$$= \int_{\Omega} \Delta u(x) dx \stackrel{(I)}{=} 0 \quad \blacksquare$$

Физ. коммент-й: д/того чтобы в обл-ти $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ стационар. распред-ние темп-ры требов., чтобы Σ ный тепловой поток через границу обл-ти был $= 0$.

Улинострация

$\psi(x) = 1 \Rightarrow$ зад. $\mathcal{H}$ (II) не разрешима

1-ть реш-я в $\mathcal{H}$ заведомо наруш-ся:

if $u = u(x)$ — реш. $\mathcal{H}$ (I), то $u(x) + C$ — реш. той же $\mathcal{H}$ (II) с той же ф-цией ψ (очевидно)

Покажем, что этим все и исчерпывается:

Пусть $(1-\pi) \cap u^{(1)}, u^{(2)} \in C^2(\bar{\Omega})$ — 2 реш. $\mathcal{H}$ (II) с одинаков. ф-цией $\psi \in C(\partial\Omega)$. Тогда $u^{(2)}(x) \equiv u^{(1)}(x) + C$ всюду в $\bar{\Omega}$ с нек-м $\text{const } C$

$\blacktriangle$ разность $u(x) = u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$,

приведем $\Delta u = 0$ в Ω ,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0$$

Запишем $g/u(x)$ функцию Грина: $\int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y = \int_{\Omega} u(x) \Delta u(x) dx +$
 $+ \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \Rightarrow \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ при $k=1, n$

$\Rightarrow u(x) \equiv C$ в $\bar{\Omega} \Rightarrow u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x) \equiv C \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow u^{(2)}(x) = u^{(1)}(x) + C$ всюду в $\bar{\Omega}$ ■

Случай неогр. обл-ти

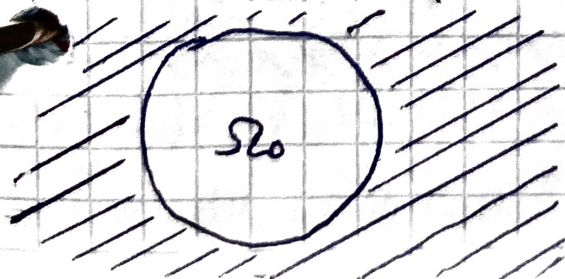
При выборе неогр. обл-ти вводятся деп. усл-я, связанные с поведением ф-ции на ∞ -ти

Типичный пример: зад. Dir. в $\mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$\square \Omega_0$ - огр. обл-ть в $\mathbb{R}^3$, $\Omega_0 \in (GO)$

$\nless \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0$ - внешн. обл-ть

$$\Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0$$



Физ. комп-й: в Ω распределена некая физич. субстанция (масса, заряд и т.п.), треб-ся изучить ее влияние во внеш. окрест. пр-ве.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

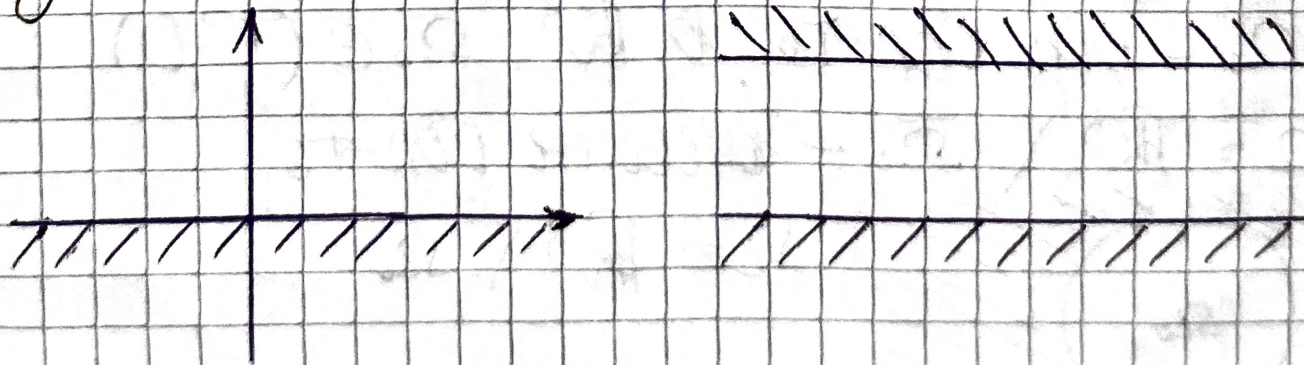
$$u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$$

$$[\text{Требование регуляр-ти на } \infty\text{-ти:}]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) : |u(x)| < \varepsilon \text{ при } |x| \geq R$$

При $n=2$ треб-ся ограниче-ть на ∞ -ти. Тогда стандарт. факты перенося на внешн. зад: есть !-ть реш. з. Дири, устойчивости и т.д. Аналогично в з. Нейм.

// См. Тих.-Сам., глава 4(?), §2 по поводу внеш. задач



При анализе подобных вопросов полагается принцип экстр

Принцип экстр д/гармонич. ф-ций
↓ ↓ Ω -обл. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (других ограничений на Ω не налагается). $\Gamma \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, предположим $\Delta u(x) = 0$ всюду в Ω , т.е. $u(x)$ - гарм. ф-ция в обл-ти Ω . Обозн. $M = \max_{\partial\Omega} u(x)$, $m = \min_{\partial\Omega} u(x)$. Тогда $m \leq u(x) \leq M$ д/ $\forall x \in \Omega$ (и при $\forall x \in \bar{\Omega}$)

Физ. комм-й: при стационар. распределении темп-ры, темп-ра внутри тела не может превосходить макс. знач-я на границе.

▲ Без док-ва (док-во как доп. вопрос) ■

! Зам Треб-ние ограничен-ти Ω важно. При его нарушении принцип экстр может не выполняться.

Стандарт. пример: $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$, $\Omega = \Gamma = \{(x,y) | y > 0\}$; $u(x,y) = y$ - гарм. ф-ция; $u_{xx} + u_{yy} = 0$
// Рис. на след. стр. // Здесь $u|_{\partial\Gamma} = u(x,y)|_{y=0} = 0 =$

↑ y

$\Rightarrow m = M = 0$, но $u(x, y) > 0$ всюду в Π .

Например, $u(x, y) = e^y \cos x$

$\| u_{xx} + u_{yy} = 0$ вып-но $\forall x \in \mathbb{R}, y > 0$

В примерах усл. регуляр-ти на ∞ -ти не выполнены.

Так, $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ (u(x, y) = e^{-y} \cos x) \quad u(x, 0) = \cos x \end{cases}$

Основные следствия принципа экстр
применительно к Диу.

$\Delta u(x) = 0$ в Ω ,

(1) $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Считаем, что $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

* реш-я $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$\downarrow$ (принцип позитив-ти) $\exists u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ - реш. з. (1), где $\varphi(y) \geq 0 \forall y \in \partial\Omega$

Тогда $u(x) \geq 0$ всюду в Ω .

По принц. экстр: $u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u = \min_{\partial\Omega} \varphi \geq 0$ $\forall x \in \Omega$ (но не на $\partial\Omega$)

$\downarrow$ (1-ть) з. Диу. (1) может иметь не более одного реш-я $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$\blacktriangle \exists u^{(1)}(x), u^{(2)}(x) - 2$ функции с одним усл. $\varphi(x)$
 $\star w(x) = u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)$. Тогда $w(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, причем $\Delta w(x) = 0$ в Ω ,

$$\gamma w|_{\partial\Omega} = 0. \text{ Тогда}$$

$\min_{\partial\Omega} w(x) = \max_{\partial\Omega} w(x) = 0$, т.е. $M = m = 0$. Это
 принцип экстр. $\Rightarrow 0 \leq w(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow w(x) = 0$
 $= u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x) \equiv 0$ и $u^{(2)}(x) = u^{(1)}(x)$ всюду в $\bar{\Omega}$.

Б (устойчивости) $\exists u^{(1)}(x)$ - реш. зад. Дир.
 (1) с ф-цией $\varphi = \varphi^{(1)}(y)$, а $u^{(2)}(x)$ - реш. зад.
 Дир. (1) с ф-цией $\varphi = \varphi^{(2)}(y)$. $\exists \varphi^{(2)}(y) - \varphi^{(1)}(y) \leq \varepsilon$
 $\leq \varepsilon$ при $\forall y \in \partial\Omega$. Тогда $|u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)| \leq \varepsilon$
 при всех $x \in \Omega$.

$\blacktriangle \star w(x) = u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)$. Тогда $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $\Delta w = 0$ в Ω ,

$$\gamma w|_{\partial\Omega} = \varphi^{(2)}(y) - \varphi^{(1)}(y). \text{ Это принцип}$$

$$\text{extr: } -\varepsilon \leq \min_{y \in \partial\Omega} (\varphi^{(2)}(y) - \varphi^{(1)}(y)) \leq w(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} (\varphi^{(2)}(y) - \varphi^{(1)}(y)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega. \text{ В силу имеющейся оценки}$$

$$-\varepsilon \leq \varphi^{(2)}(y) - \varphi^{(1)}(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in \partial\Omega \Rightarrow -\varepsilon \leq w(x) =$$

$$= u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow |u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)| \leq \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$$

Фунд. реш-е ур-ния Лапласа

$$\mathbb{R}^n, n \geq 2, x = (x_1, \dots, x_n), |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

$r = |x|$ — сферич. радиус

$|x| = 1$ — единич. $(n-1)$ -мерная сфера в $\mathbb{R}^n$

$W_n = \int_{|y|=1} ds_y$ — площадь поверх-ти $(n-1)$ -мерной сферы в $\mathbb{R}^n$

$$W_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Например: $W_2 = 2\pi$,

$$W_3 = 4\pi, \dots$$